INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 18.02.2012

CLASA a XI a

1. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{(2n+1)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}.$

Gazeta Matematică

2. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{Q})$ matrici nenule, p_1, p_2 numere prime astfel încât

$$\det\left(\sqrt{p_1}A+B\right)=\det\left(A+\sqrt{p_2}B\right)=0.$$

Să se demonstreze că:

a) $\det A=\frac{1}{2}\left[(TrA)^2-Tr\left(A^2\right)\right].$

b) $\det A=\det B=0.$

c) $(TrA)\cdot(TrB)=Tr(AB).$

Gheorghe Alexe, Brăila

3. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $x_1>0$ şi $x_{n+1}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n},(\forall)n\in\mathbb{N}^*.$

a) Arătați că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}.$

Marius Damian, Brăila

4. Fie $A\in M_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det(2I_n+A)=\det(5I_n+A)=2012.$

a) Dacă $n\geq 3$, demonstrați că $\det(kI_n+A)\neq 2013,(\forall)k\in\mathbb{Z}.$

b) Dacă $n=2$, demonstrați că există o infinitate de matrice A cu proprietatea din enunț.

Gabriel Daniilescu, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 7 puncte pentru fiecare subiect.Timp de lucru 3 ore.